Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**6 клас**

1. З’ясуйте, чи ділиться сума чисел $1 + 2 + 3 + ...+ 2015 + 2016 + 2017$ на 2017? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чебурашка та Крокодил Гена з’їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З’ясувалося, що вони з’їли порівну. За який час Чебурашка сам з’їв би цей торт?

3. В аеропорту «Бориспіль» є горизонтальна рухома доріжка довжиною 500 метрів, яка переміщує пасажирів зі швидкістю 4 км/год. Тетяна та Оксана одночасно заходять на цю доріжку, причому Тетяна йде доріжкою зі швидкістю 6 км/год, а Оксана стоїть на місці. З’ясуйте, якою буде відстань між дівчатами, коли Тетяна дійде до кінця доріжки? Відповідь обґрунтуйте.

4. У даний момент сім'я складається з батька, матері та сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина в 9 разів. Дев’ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. З’ясуйте, скільки років батькові? Відповідь обґрунтуйте.

5. У клітинки квадрата $3\times3$ по одному записані числа 1, 2, …, 9 так, що сусідні числа стоять у суміжних по стороні клітинках. Відомо, що сума чотирьох чисел, що стоять у кутах квадрата, дорівнює 18. З’ясуйте, яке число записано всередині? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 3 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**7 клас**

1. Дільник натурального числа називається власним, якщо він не дорівнює самому числу та більший за 1. Знайдіть усі такі натуральні числа, у яких найбільший власний дільник на 2017 більший за найменший власний дільник.

2. Знайдіть усі такі двоцифрові натуральні числа $N$, які дорівнюють сумі цифр числа $N$ до якої додається куб суми цифр числа $N$. Відповідь обґрунтуйте.

3. У даний момент сім'я складається з батька, матері та сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина в 9 разів. Дев’ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. З’ясуйте, скільки років батькові? Відповідь обґрунтуйте.

4. Квадрат розрізаний на 4 однакових прямокутники та 1 квадрат (рис. 1). Відомо, що площа меншого квадрата дорівнює 16, а площа кожного прямокутника – 96. Визначіть сторони прямокутника.

5. У клітини дошки $10\times10$ по одному вписані натуральні числа від 1 до 100. Сашко може вибрати будь-який квадрат $2\times2$ та додати до кожного числа цього квадрата однакове ціле число. Чи існує така розстановка, при який Сашко зможе отримати нову розстановку чисел, що отримується з початкової поворотом на $90°$ відносно центру квадрата? Відповідь обґрунтуйте.

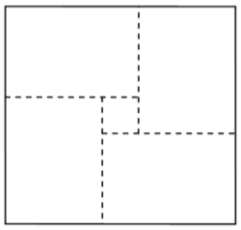

Рис. 1

6. У шаховому турнірі в одне коло грали 8 учасників. За перемогу дається 1 очко, за нічию – $\frac{1}{2}$, за поразку – 0. Той, хто посів друге місце, набрав стільки ж очок, скільки учасники, що посіли останні 4 місця. Серед партій, що між собою зіграли 4 учасники, які посіли перші 4 місця, було принаймні 3 нічиї. З’ясуйте, скільки очок набрав переможець турніру?

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**8 клас**

1. Доведіть, що число $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017+1$ є квадратом натурального числа.

2. У даний момент сім'я складається з батька, матері та сина. Сума років усіх членів сім'ї дорівнює 65. Чотири роки тому батько був старший за сина в 9 разів. Дев’ять років тому сума років усіх членів сім'ї дорівнювала 40. З’ясуйте, скільки років батькові? Відповідь обґрунтуйте.

3. Знайдіть усі такі трицифрові натуральні числа $N$, які дорівнюють сумі цифр числа $N$ до якої додається куб суми цифр числа $N$.

4. На дошці записані числа 1, 3, 6 та 10. На кожному кроці можна витерти будь-які два з написаних чисел $a$, $b$ і записати замість них числа $a+b$ та $ab$. З’ясуйте, чи можна при цьому отримати на дошці числа 2016, 2017, 2019, 2022? Відповідь обґрунтуйте.

5. У трикутнику $ABC$ на стороні $BC$ вибрано таку точку $K$, що відрізок $AK$ перетинає медіану $BM$ у точці $N$, причому $AN = BC$. Доведіть, що $BK = KN$.

6. Куб $5\times5\times5$ треба повністю заповнити меншими кубиками зі сторонами 1, 2 та 3 так, щоб вони не перетиналися. З’ясуйте, чи можна при цьому використати менше ніж 50 таких кубиків? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**9 клас**

1. Обчисліть значення виразу:

$$2019\frac{18}{19}\cdot 2018\frac{18}{19}-2020\frac{18}{19}\cdot 2017\frac{18}{19}.$$

2. На дошці записані числа 1, 3, 6 та 10. На кожному кроці можна витерти будь-які два з написаних чисел $a$, $b$ і записати замість них числа $a+b$ та $ab$. З'ясуйте, чи можна при цьому отримати на дошці числа 2016, 2017, 2019, 2022? Відповідь обґрунтуйте.

3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2015, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2016, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2017. \end{cases}$

4. Відомо, що $a \neq b$ та рівняння $ax^{2017}+x^{2016}+b=0$ і $bx^{2017}+x^{2016}+a=0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a+b$.

5. У трапеції $ABCD$ з основами $AD$ і $BC$, $AD > BC$, діагоналі $AC$ і $BD$ перетинаються в точці $E$. Дотична до описаного кола трикутника $BCE$, проведена в точці $E$, перетинає пряму $AD$ в точці $F$ так, що точка $D$ лежить між точками $A$ і $F$. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка $EF$.

6. Маємо дошку з 2016 рядків та 2017 стовпчиків. З'ясуйте, чи можна прибрати дві клітинки з останнього стовпчика так, щоб дошку, яка вийшла, можна було замостити без накладань фігурками, що наведені на рис. 1, які можна повертати. Відповідь обґрунтуйте.

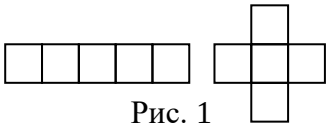

Рис. 1

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**10 клас**

1. Обчислить значення виразу: $\sqrt{2017+2\sqrt{2016}}-\sqrt{2017-2\sqrt{2016}}$.

2. Дільник натурального числа називається власним, якщо він не дорівнює самому числу та більший за 1. Знайдіть усі такі натуральні числа, у яких найбільший власний дільник на 2017 більше або менше одинадцятого степеня найменшого власного дільника. Відповідь обґрунтуйте.

3. Відомо, що додатні дійсні числа $x$ і $y$ задовольняють нерівність $3x+4y+6z\leq 12$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 3$.

4. На катеті $AC$ прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle BAC = 90^\circ$) відмічено точку $D$, таку, що $\angle CBD = 30^\circ$. Доведіть, що $CD \geq 2AD$

5. Знайдіть всі цілі значення $a$, при яких рівняння $x^2+(2017+a)x+2016a+4033=0$ має цілі розв'язки.

6. На папері в клітинку зі стороною 1 задано замкнену ламану без самоперетинів. Усі вершини ламаної лежать у вузлах сітки, а всі її ланки утворюють кут $45^\circ$ з лініями сітки, а площа, яку вона обмежує, дорівнює 8. З'ясуйте, скільки вузлів сітки може лежати всередині (не на межі) ламаної? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

**Завдання**
**ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**2017-2018 н.р.**

**11 клас**

1. Обчислить значення виразу $\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+...+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 8+...+n\cdot 3n\cdot 9n}}$, якщо $n$=2017.

2. Розв'яжіть рівняння: $2017^x - 2016^x = 1$.

3. Відомо, що $x$ і $y$ – додатні дійсні числа , для яких $x+y=1$. Доведіть, що $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$.

4. У трикутнику $ABC$, $\angle ABC = 120^\circ$. Всередені кута $ABC$ відмічено точки $M$ и $N$, такі, що $AM = BM$, $BC = MC$, $BN = CN$ и $BA = NA$. Доведіть, що $BC = AB$.

5. Знайдіть усі такі функції $f(x)$, що визначені на множині дійсних чисел, які для довільних дійсних $x$, $y$ задовольняють рівність: $f(xy) = xf(y) + 2017f(x) + 2016$.

6. Кожне ціле число на координатній прямій розфарбовано жовтим або синім кольором, причому числа 2016 і 2017 розфарбовано різними кольорами. З'ясуйте, чи обов'язково можна знайти три однаково розфарбованих цілих числа, сума яких дорівнює нулю? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється